ПРОЦЕССЫ И МАШИНЫ АГРОИНЖЕНЕРНЫХ СИСТЕМ
PROCESSES AND MACHINES OF AGRO - ENGINEERING SYSTEMS



УДК 581.1 10.23947/1992-5980-2018-18-1-124-131

Моделирование подъема воды в гидравлически попарно связанных цилиндрических капиллярах разного радиуса*

И. А. Кипнис[1], Ю. М. Вернигоров[2]**
[1] ООО «Научно-производственная фирма “КАСИОР”», г. Москва, Российская Федерация
[2] Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

Modeling of water rising in hydraulically coupled cylindrical capillaries of different radii ***

I. A. Kipnis[1], Yu. M. Vernigorov[2]**
[1] “KASIOR” Research and Production Company, Moscow, Russian Federation
[2] Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

Введение. Вертикальный восходящий поток воды в ксилеме растений обеспечивается действием сил поверхностного натяжения воды в менисках капилляров. В ряде работ показано, что распределение воды в наклонных капиллярных системах подчиняется общему правилу: в ветвях нижнего уровня продвижение воды максимально. При этом высота подъема воды в вертикальном капилляре пропорциональна количеству боковых ветвей в капиллярной системе. Ряд вопросов остаются открытыми. В их числе: роль окаймленных пор, обеспечивающих гидравлическую связь между сосудами; влияние размеров пор и параметров гидравлически связанных сосудов на подъем в них воды.
Материалы и методы. Рассмотрена модель системы, состоящей из двух вертикальных капилляров разного радиуса. Они соприкасаются боковыми стенками и погружены в воду. Выполнены расчеты, описывающие соотношения элементов данной системы.
Результаты исследования. Установлено, что высота подъема воды в гидравлически связанных капиллярах в общем случае различна.
Обсуждение и заключения. Показана зависимость: чем меньше разность высот между порами и чем ближе пора к поверхности воды, тем выше поднимается вода в капиллярах.

Introduction. Vertical upward flow of water in the plant xylem occurs under the action of the water surface tension in the capillary menisci. In some papers, it is shown that the distribution of water in the inclined capillary systems is subject to the general rule: movement of water reaches a maximum in the branches of a lower level. In this case, the water height in a vertical capillary is proportional to the number of lateral branches in the capillary system. A set of issues remains open, among them: the role of bordered pores providing a hydraulic connection between vessels; effect of pore sizes and parameters of hydraulically coupled vessels on the water rise in them.
Materials and Methods. A model of the system consisting of two vertical capillaries of different radii is considered. They touch one another by side walls and are immersed in water. Calculations describing the relationships of the elements of the given system are carried out.
Research Results. It is established that the height of water in hydraulically coupled capillaries is generally different.
Discussion and Conclusions. The dependence is shown: the smaller the difference in level between pores and the closer the pore is to the water surface, the higher the water in the capillaries rises.

Ключевые слова: растение, капилляры, ксилема, модель, транспирация.

Keywords: plant, capillaries, xylem, model, transpiration.

Образец для цитирования: Кипнис, И. А. Моделирование подъема воды в гидравлически попарно связанных цилиндрических капиллярах разного радиуса / И. А. Кипнис, Ю. М. Вернигоров // Вестник Дон. гос. техн. ун-та. — 2018. — Т. 18, № 1. — С. 124−131.

For citation: I.A. Kipnis, Yu.M. Vernigorov. Modeling of water rising in hydraulically coupled cylindrical capillaries of different radii. Vestnik of DSTU, 2018, vol. 18, no.1, pp. 124−131.

Введение. Изучение анатомического строения и физиологии хвойных и лиственных растений [1–4] показало, что вертикальный транспорт воды обеспечивают системы вертикальных трахеид и сосудов, связанных

*Работа выполнена в рамках инициативной НИР.
**E-mail:ikipnis@yandex.ru, jvernigorov@dstu.edu.ru
*** The research is done within the frame of the independent R&D.

между собой порами. Диаметр трахеид хвойных деревьев — $(20 \div 40) \cdot 10^{-6}$ м, высота — $(2{,}5 \div 5) \cdot 10^{-3}$ м [5]. Минимальный диаметр сосудов лиственных деревьев — $40 \cdot 10^{-6}$ [5], максимальный может превышать $700 \cdot 10^{-6}$ м. Длина — до нескольких метров [5] (у лиан — до 10 м [6]).

Общий объем сосудов в зависимости от породы дерева — 10–55 % объема ствола [5]. Основная функция сосудов — подъем воды в растении. Стенки сосудов покрыты не имеющими торуса окаймленными порами, с помощью которых осуществляется гидравлическая связь между сосудами (см., например, [3]). Таким образом, фактически подъем воды в сосудистой системе ствола происходит в гидравлически связанных вертикальных капиллярах различных диаметров. Ряд работ, например [7], посвящены изучению водного транспорта в растениях, в том числе методами компьютерной томографии и микроскопии [8]. Однако выше показано, что диапазон диаметров сосудов весьма широк. Поэтому эксперименты не позволяют выяснить влияние параметров гидравлически связанных окаймленными порами сосудов растений на подъем в них воды.

В [9] показано, что основным механизмом подъема воды в ветвящихся капиллярных системах является действие сил поверхностного натяжения в менисках капилляров.

В [10] изучено продвижение воды в ксилеме растений с трахеидальной проводимостью и определена величина гидравлического сопротивления одиночной окаймленной поры и их совокупности.

В источниках отсутствуют сведения о закономерностях продвижения и распределения воды в гидравлически связанных вертикальных капиллярах (сосудах ксилемы стволов).

Целью представленной работы является выявление основных закономерностей подъема и распределения воды в ксилеме растений путем моделирования продвижения воды в вертикальных гидравлически связанных капиллярах.

Материалы и методы. Рассмотрим систему, состоящую из двух вертикальных капилляров разного радиуса. Они соприкасаются боковыми стенками и погружены в воду. Пусть на высоте h_{12} от поверхности воды имеется сквозное отверстие, соединяющее внутреннее пространство капилляров, как показано на рис. 1, *a*.

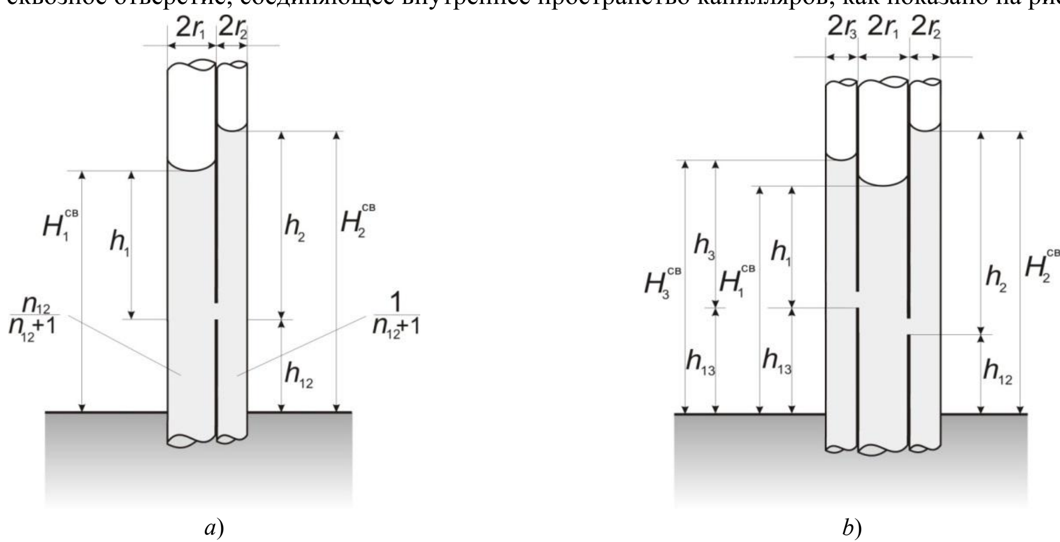


Рис. 1. Модели капиллярных систем с капиллярами, связанными одним (*a*) и двумя (*b*) отверстиями

Fig. 1. Models of capillary systems with capillaries connected by one (a) and two (b) apertures

Радиус левого капилляра равен r_1, правого — r_2, при этом верно соотношение:

$$r_1 = n_{12}\, r_2, \tag{1}$$

где $n_{12} = r_1/r_2$ — соотношение радиусов капилляров, $n_{12} \geq 1$.

Подъем воды в этой системе происходит за счет совместного действия сил поверхностного натяжения воды $F_{Н1}$ и $F_{Н2}$ в менисках капилляров.

Эта сила в общем виде описывается соотношением

$$F_{Н} = 2\pi r\, \sigma \cos \alpha. \tag{2}$$

Она прямо пропорциональна коэффициенту поверхностного натяжения воды σ, косинусу угла смачивания α и радиусу капилляра *r* [11]. Из рисунка можно видеть, что сила, например $F_{Н1}$, поднимает воду в капилляре радиуса r_1 в объеме этого капилляра высотой h_1, а также часть объема воды высотой h_{12} в обоих капиллярах. Это происходит благодаря наличию отверстия, связывающего капилляры, и принципу независимости действия сил. Аналогично $F_{Н2}$ независимо от $F_{Н1}$ поднимает воду в объеме правого капилляра высотой h_2 и часть

объема воды высотой h_{12} в обоих капиллярах. Для составления уравнения равновесия воды в системе определим, какую долю вносят F_{H1} и F_{H2} в подъем воды в суммарном вертикальном объеме высотой h_{12}.

Равнодействующая сил, обеспечивающая подъем воды в этом объеме, пропорциональна сумме радиусов капилляров, которая равна

$$r_1 + r_2 = n_{12}r_2 + r_2 = (n_{12}+1)\, r_2. \tag{3}$$

Можно считать, что правый капилляр поднимает $1/(n_{12}+1)$ часть воды в вертикальной общей части воды, а левый — $n_{12}/(n_{12}+1)$ часть воды.

Общий объем вертикальной части системы высотой h_{12} будет равен

$$\pi r_1^2 h_{12} + \pi r_2^2 h_{12} = \pi n_{12}^2 r_2^2 h_{12} + \pi\, r_2^2 h_{12} = (n_{12}^2 + 1)\, \pi r_2^2 h_{12}. \tag{4}$$

Учитывая вышеприведенные соотношения, уравнения подъема воды в правом и левом капиллярах могут быть записаны в виде:

$$\frac{(n_{12}^2+1)\pi r_2^2 h_{12}}{(n_{12}+1)}\, \rho g + \pi r_2^2 h_2 \rho g = 2\pi r_2 \sigma \cos\alpha, \tag{5}$$

$$n_{12}\frac{({n_{12}}^2+1)\, \pi r_2^2 h_{12}}{(n_{12}+1)}\, \rho g + \pi r_1^2 h_1 \rho g = 2\pi r_1 \sigma \cos\alpha. \tag{6}$$

Отсюда:

$$\pi r_2^2 h_2 \rho g = 2\pi r_2 \sigma \cos\alpha - \frac{(n_{12}^2+1)\, \pi r_2^2 h_{12}}{(n_{12}+1)}\, \rho g, \tag{7}$$

$$\pi r_1^2 h_1 \rho g = 2\pi r_1 \sigma \cos\alpha - n_{12}\frac{(n_{12}^2+1)\, \pi r_2^2 h_{12}}{(n_{12}+1)}\, \rho g. \tag{8}$$

Решая (7) и (8) относительно h_1 и h_2, получим:

$$h_2 = \frac{2\sigma\cos\alpha}{r_2 \rho g} - \frac{(n_{12}^2+1) h_{12}}{(n_{12}+1)} = H_2^0 - \frac{(n_{12}^2+1)}{(n_{12}+1)}\, h_{12}, \tag{9}$$

$$h_1 = \frac{2\sigma\cos\alpha}{r_1 \rho g} - \frac{(n_{12}^2+1) h_{12}}{(n_{12}+1)} = H_1^0 - n_{12}\frac{(n_{12}^2+1)}{(n_{12}+1)}\frac{r_2^2}{r_1^2}\, h_{12} = H_1^0 - \frac{(n_{12}^2+1)}{n_{12}(n_{12}+1)}\, h_{12}, \tag{10}$$

где H_2^0 и H_1^0 — высоты подъема воды в одиночных вертикальных капиллярах.

Из (9) и (10) следует, что при $h_{12} = 0$ $h_2 = H_2^0$, а $h_1 = H_1^0$, то есть вода поднимается на ту или иную высоту как в одиночных, не связанных между собой отверстием капиллярах.

Высоты подъема воды $H_2^{св}$ и $H_1^{св}$ в связанных отверстием капиллярах будут определяться соотношениями:

$$H_2^{св} = h_2 + h_{12} = H_2^0 - \frac{(n_{12}^2+1)}{(n_{12}+1)}\, h_{12} + h_{12} = H_2^0 + \left(1 - \frac{(n_{12}^2+1)}{(n_{12}+1)}\right) h_{12}, \tag{11}$$

$$H_1^{св} = h_1 + h_{12} = H_1^0 - \frac{(n_{12}^2+1)}{n_{12}(n_{12}+1)}\, h_{12} + h_{12} = H_1^0 + \left(1 - \frac{(n_{12}^2+1)}{n_{12}(n_{12}+1)}\right) h_{12}. \tag{12}$$

Из (11) и (12) следует, что $H_2^{св} = H_1^{св} = H_2^0 = H_1^0$ при $n_{12} = 1$ или $h_{12} = 0$.

Из (9) и (10) следует, что при увеличении h_{12} величины h_1 и h_2 становятся равными нулю при условии

$$H_1^0 = \frac{(n_{12}^2+1)}{n_{12}(n_{12}+1)}\, h_{12},\quad H_2^0 = \frac{(n_{12}^2+1)}{(n_{12}+1)}\, h_{12}. \tag{13}$$

Выражая из (13) h_{12}, получим соотношение

$$\frac{n_{12}(n_{12}+1)}{(n_{12}^2+1)}\, H_1^0 = \frac{(n_{12}+1)}{(n_{12}^2+1)}\, H_2^0, \tag{14}$$

откуда

$$H_2^0 \,/\, H_1^0 = n_{12}. \tag{15}$$

Полученный в (15) результат означает следующее. При заданных величинах σ, α и ρ для двух одиночных вертикальных капилляров разного радиуса соотношение высот подъема менисков пропорционально отношению радиусов капилляров.

В связанных отверстием капиллярах происходит перераспределение сил, соотношение высот подъема $H_2^{св}$ и $H_1^{св}$ иное, чем (15). Для определения его запишем разность (11) и (12):

$$H_2^{св} - H_1^{св} = H_2^0 - \frac{(n_{12}^2+1)}{(n_{12}+1)}\, h_{12} + h_{12} - H_1^0 + \frac{(n_{12}^2+1)}{n_{12}(n_{12}+1)}\, h_{12} - h_{12} = \left(1 - \frac{1}{n_{12}}\right)\left(H_2^0 - \frac{(n_{12}^2+1)}{(n_{12}+1)}\, h_{12}\right). \tag{16}$$

Из (16) следует, что $H_2^{св} - H_1^{св} = 0$ при $n_{12} = 1$.

Высота подъема воды в капиллярах одинакова также при условии

$$h_{12} = \frac{(n_{12}+1)}{(n_{12}^2+1)}\, H_2^0. \tag{17}$$

Полученный результат интерпретируется следующим образом. При $n_{12} = 1$ (то есть при равенстве радиусов связанных отверстием капилляров) разность высот $H_2^{св}$ и $H_1^{св}$ (в силу полной симметрии распределения сил в системе) будет равна нулю при любом значении h_{12}, в том числе при h_{12}, стремящемся к H_2^0. В этом случае

$F_{H1} = F_{H2}$ — и система может рассматриваться как два капилляра равного радиуса (они вертикальные, независимые и погружены в воду). При $n_{12} > 1$ $F_{H1} \neq F_{H2}$ нарушается симметрия их действия на поднимаемый объем воды. В результате согласно (17) высота h_{12}, при которой разность высот $H_2^{св}$ и $H_1^{св}$ становится равной нулю, по мере увеличения n_{12} уменьшается, так как $r_1 \to r_2$. То же самое происходит при увеличении h_{12} при $n_{12} = const$. Это объясняется тем, что F_{H1} и F_{H2} в капиллярах одновременно, но не одинаково воздействуют на суммарный объем воды ниже отверстия в обоих капиллярах. Поэтому и связанные отверстием капилляры при $H_2^{св} - H_1^{св} = 0$ можно рассматривать как один капилляр высотой h_{12} с эквивалентным радиусом, равным

$$r_э = r_2\sqrt{n_{12}^2 + 1}. \quad (18)$$

Пусть имеется система из трех капилляров, как показано на рис. 1, *б*. Центральный капилляр радиуса r_1 связан с правым капилляром радиуса r_2 и с левым капилляром радиуса r_3 отверстиями, расположенными соответственно на высотах h_{12} и h_{13} от поверхности воды. Примем также, что радиус среднего капилляра соотносится с радиусами правого и левого капилляров, как

$$r_1 = n_{12}\, r_2 \text{ и } r_1 = n_{13}\, r_3 \text{ при } n_{12} \text{ и } n_{13} \geq 1. \quad (19)$$

В этой модели возможны три варианта взаимного расположения отверстий: $h_{12} = h_{13}$, $h_{12} < h_{13}$, $h_{12} > h_{13}$. Рассмотрим каждый из них.

При $h_{12} = h_{13}$ все три силы поверхностного натяжения F_{H1}, F_{H2} и F_{H3} в менисках капилляров одновременно воздействуют на три объема воды, находящиеся ниже отверстий. При этом равнодействующая сил, обеспечивающая подъем воды в этом объеме, пропорциональна сумме радиусов капилляров, которая с учетом (19) равна:

$$r_1 + r_2 + r_3 = n_{12}\, r_2 + r_2 + n_{12}\, r_2 / n_{13} = (n_{12} + 1 + n_{12}/n_{13})\, r_2. \quad (20)$$

Тогда можно считать, что правый капилляр радиусом r_2 поднимает $1/(n_{12} + 1 + n_{12}/n_{13})$ часть. Капилляр радиусом r_3 поднимает $n_{12}/\,(n_{13}(n_{12} + 1 + n_{12}/n_{13}))$. Капилляр радиусом r_1 поднимает $n_{12}/(n_{12} + 1 + n_{12}/n_{13})$ часть объема воды общей части системы.

Общий объем вертикальной части воды высотой $h_{12} = h_{13}$ будет равен:

$$\pi r_1^2 h_{12} + \pi r_2^2 h_{12} + \pi r_3^2 h_{12} = (n_{12}^2 + 1 + n_{12}^2/n_{13}^2)\, \pi r_2^2\, h_{12}. \quad (21)$$

С учетом (21) уравнения подъема воды в центральном, правом и левом капиллярах могут быть записаны в виде:

$$\frac{n_{12}\,(n_{12}^2 + 1 + n_{12}^2/n_{13}^2)\, \pi r_2^2\, h_{12}}{n_{12} + 1 + n_{12}/n_{13}} \rho g + \pi r_1^2 h_1 \rho g = 2\pi r_1 \sigma \cos\alpha, \quad (22)$$

$$\frac{(n_{12}^2 + 1 + n_{12}^2/n_{13}^2)\, \pi r_2^2\, h_{12}}{n_{12} + 1 + n_{12}/n_{13}} \rho g + \pi r_2^2 h_2 \rho g = 2\pi r_2 \sigma \cos\alpha, \quad (23)$$

$$\frac{n_{12}(n_{12}^2 + 1 + n_{12}^2/n_{13}^2)\, \pi r_2^2\, h_{12}}{n_{13}(n_{12} + 1 + n_{12}/n_{13})} \rho g + \pi r_3^2 h_3 \rho g = 2\pi r_3 \sigma \cos\alpha. \quad (24)$$

Решая, как и выше, (22)–(24) относительно $h_1,\ h_2,\ h_3$ и далее относительно $H_1^{св}, H_2^{св}, H_3^{св}$ получим:

$$h_1 = H_1^0 - \frac{(n_{12}^2 + 1 + n_{12}^2/n_{13}^2)}{n_{12}(n_{12} + 1 + n_{12}/n_{13})}\, h_{12}, \quad (25)$$

$$h_2 = H_2^0 - \frac{n_{12}^2 + 1 + n_{12}^2/n_{13}^2}{n_{12} + 1 + n_{12}/n_{13}}\, h_{12}, \quad (26)$$

$$h_3 = H_3^0 - \frac{n_{12}^3(n_{12}^2 + 1 + n_{12}^2/n_{13}^2)}{n_{13}^3(n_{12} + 1 + n_{12}/n_{13})}\, h_{12}, \quad (27)$$

$$H_1^{св} = H_1^0 + \left(1 - \frac{(n_{12}^2 + 1 + n_{12}^2/n_{13}^2)}{n_{12}(n_{12} + 1 + n_{12}/n_{13})}\right) h_{12}, \quad (28)$$

$$H_2^{св} = H_2^0 + \left(1 - \frac{n_{12}^2 + 1 + n_{12}^2/n_{13}^2}{n_{12} + 1 + n_{12}/n_{13}}\right) h_{12}, \quad (29)$$

$$H_3^{св} = H_3^0 + \left(1 - \frac{n_{12}^3(n_{12}^2 + 1 + n_{12}^2/n_{13}^2)}{n_{13}^3(n_{12} + 1 + n_{12}/n_{13})}\right) h_{12}. \quad (30)$$

Анализ (25)–(30) показывает, что с учетом (19)

$$n_{12}\, H_1^0 = H_2^0,\ n_{13}\, H_1^0 = H_3^0. \quad (31)$$

При $n_{12} = n_{13} = 1$ $h_1 = h_2 = h_3$, а высоты $H_1^{св}$, $H_2^{св}$, $H_3^{св}$ максимальны и соответствуют высотам подъема воды в одиночном вертикальном капилляре. Аналогичный результат получается при $n_{12} \neq n_{13} \neq 1$, но при $h_{12} \to 0$. Физически это означает, что в данном случае вода в капиллярах поднимается как в трех независимых, отдельно стоящих вертикальных капиллярах разного радиуса.

Если по высоте капилляров имеется q отверстий и расстояния между ними одинаковые ($h_{12} = h_{13}$), то высота столба воды в общей части системы увеличиваются в q раз, а $h_1,\ h_2,\ h_3$ и $H_1^{св}$, $H_2^{св}$, $H_3^{св}$ уменьшаются.

Оценим, при какой величине h_{12} (при прочих равных условиях) h_1, h_2, h_3 и $H_1^{св}$, $H_2^{св}, H_3^{св}$ могут стать равными нулю. Так, из (25)–(27) с учетом (31) можно получить следующие соотношения для h_{12}:

$$\frac{n_{12}(n_{12}+1+n_{12}/n_{13})}{(n_{12}^2+1+n_{12}^2/n_{13}^2)} H_1^0 = h_{12}, (32)$$

$$\frac{n_{12}+1+n_{12}/n_{13}}{n_{12}^2+1+n_{12}^2/n_{13}^2}\; n_{12}\, H_1^0 = h_{12}, \qquad (33)$$

$$\frac{n_{13}^3(n_{12}+1+n_{12}/n_{13})}{n_{12}^3(n_{12}^2+1+n_{12}^2/n_{13}^2)} n_{13}\, H_1^0 = h_{12}. \qquad (34)$$

Видно, что (32) и (33) равны и их отношение равно единице. Но отношение (32) и (33) к (34) дают в результате $n_{13}^4/n_{12}^4 = h_{12}$. Если при этом предположить, что $h_1 = h_2 = h_3 = 0$, то это возможно лишь при $n_{13}^4/n_{12}^4 = 1$, что, в свою очередь, возможно лишь при $n_{12} = n_{13}$. Физически полученный результат интерпретируется следующим образом: условие $h_1 = h_2 = h_3 = 0$ выполняется лишь при равенстве радиусов капилляров. В противном случае указанное равенство не выполняется, уровни воды в капиллярах всегда не одинаковы и зависят от соотношения их радиусов. Это останется справедливым и в случае, если в системе будет *N* попарно связанных капилляров.

Из (28)–(30) следует, что $H_1^{св}$, $H_2^{св}$, $H_3^{св}$ равны нулю при условии:

$$H_1^0 = \left(\frac{(n_{12}^2+1+n_{12}^2/n_{13}^2)}{n_{12}(n_{12}+1+n_{12}/n_{13})} - 1\right) h_{12};\;\; n_{12}\, H_1^0 = \left(\frac{n_{12}^2+1+n_{12}^2/n_{13}^2}{n_{12}+1+n_{12}/n_{13}} - 1\right) h_{12};$$

$$n_{13}\, H_1^0 = \left(\frac{n_{12}^3(n_{12}^2+1+n_{12}^2/n_{13}^2)}{n_{13}^3(n_{12}+1+n_{12}/n_{13})} - 1\right) h_{12}. \qquad (35)$$

Эти равенства выполняются только в случае $n_{12} = n_{13} = 1$.

По причинам, указанным выше, $H_1^{св}$, $H_2^{св}$, $H_3^{св}$ одновременно не могут быть равными нулю. Разность высот подъема воды в капиллярах при $n_{12} \neq n_{13} \neq 1$ может быть относительной, например, H_2^0 определяется из соотношений:

$$H_2^{св} - H_1^{св} = \left(1 - \frac{1}{n_{12}}\right) H_2^0 - \left(1 - \frac{1}{n_{12}}\right) \frac{n_{12}^2+1+n_{12}^2/n_{13}^2}{n_{12}+1+n_{12}/n_{13}} h_{12}, \qquad (36)$$

$$H_3^{св} - H_1^{св} = \left(1 - \frac{1}{n_{13}}\right) n_{12} H_2^0 - \left(\frac{n_{12}^3}{n_{13}^3} - \frac{1}{n_{12}}\right) \frac{n_{12}^2+1+n_{12}^2/n_{13}^2}{n_{12}+1+n_{12}/n_{13}} h_{12}, \qquad (37)$$

$$H_2^{св} - H_3^{св} = \left(1 - \frac{n_{13}}{n_{12}}\right) H_2^0 - \left(1 - \frac{n_{12}^3}{n_{13}^3}\right) \frac{n_{12}^2+1+n_{12}^2/n_{13}^2}{n_{12}+1+n_{12}/n_{13}} h_{12}. \qquad (38)$$

Из (36)–(38) видно, что разности высот подъема воды в капиллярах равны нулю только при $n_{12} = n_{13} = 1$, то есть при равном радиусе всех капилляров, и принимают разные значения при $n_{12} \neq n_{13} \neq 1$.

При $h_{12} < h_{13}$ силы поверхностного натяжения $F_{Н1}$, $F_{Н2}$ и $F_{Н3}$ в менисках капилляров воздействуют на три объема воды, находящиеся ниже отверстий. Суммарный их объем с учетом (19) равен:

$$\pi r_1^2 h_{13} + \pi r_2^2 h_{12} + \pi r_3^2 h_{13} = ((n_{12}^2 + n_{12}^2/n_{13}^2)\, h_{13} + h_{12})\, \pi r_2^2. \qquad (39)$$

Учитывая, что равнодействующая сил, обеспечивающая подъем воды в этом объеме, пропорциональна сумме радиусов капилляров с учетом (23), уравнения подъема воды в центральном, правом и левом капиллярах могут быть записаны в виде:

$$\frac{n_{12}\,((n_{12}^2 + n_{12}^2/n_{13}^2)\, h_{13} + h_{12})\, \pi r_2^2}{n_{12}+1+n_{12}/n_{13}} \rho g + \pi r_1^2 h_1 \rho g = 2\pi r_1 \sigma \cos\alpha, \qquad (40)$$

$$\frac{((n_{12}^2 + n_{12}^2/n_{13}^2)\, h_{13} + h_{12})\, \pi r_2^2}{n_{12}+1+n_{12}/n_{13}} \rho g + \pi r_2^2 h_2 \rho g = 2\pi r_2 \sigma \cos\alpha, \qquad (41)$$

$$\frac{n_{12}((n_{12}^2 + n_{12}^2/n_{13}^2)\, h_{13} + h_{12})\, \pi r_2^2}{n_{13}(n_{12}+1+n_{12}/n_{13})} \rho g + \pi r_3^2 h_3 \rho g = 2\pi r_3 \sigma \cos\alpha. \qquad (42)$$

Если $h_{13} = \delta\, h_{12}$ $\delta \geq 1$, то решения полученных уравнений относительно h_1, h_2, h_3 и $H_1^{св}, H_2^{св}, H_3^{св}$ можно записать в виде:

$$h_1 = H_1^0 - \frac{((n_{12}^2 + n_{12}^2/n_{13}^2)\,\delta + 1)}{n_{12}(n_{12}+1+n_{12}/n_{13})} h_{12}, \qquad (43)$$

$$h_2 = H_2^0 - \frac{((n_{12}^2 + n_{12}^2/n_{13}^2)\,\delta + 1)}{n_{12}+1+n_{12}/n_{13}} h_{12}, \qquad (44)$$

$$h_3 = H_3^0 - \frac{n_{12}^3\,((n_{12}^2 + n_{12}^2/n_{13}^2)\,\delta + 1)}{n_{13}^3(n_{12}+1+n_{12}/n_{13})} h_{12}, \qquad (45)$$

$$H_1^{св} = H_1^0 + \left(\delta - \frac{((n_{12}^2 + n_{12}^2/n_{13}^2)\,\delta + 1)}{n_{12}(n_{12}+1+n_{12}/n_{13})}\right) h_{12}, \qquad (46)$$

$$H_2^{св} = H_2^0 + \left(1 - \frac{((n_{12}^2 + n_{12}^2/n_{13}^2)\,\delta + 1)}{n_{12}+1+n_{12}/n_{13}}\right) h_{12}, \qquad (47)$$

$$H_3^{св} = H_3^0 + \left(\delta - \frac{n_{12}^3\,((n_{12}^2 + n_{12}^2/n_{13}^2)\delta + 1)}{n_{13}^3(n_{12}+1+n_{12}/n_{13})}\right) h_{12}. \qquad (48)$$

Разность высот подъема воды в капиллярах может быть определена относительно, например, H_2^0 из выражений:

$$H_2^{св} - H_1^{св} = \left(1 - \frac{1}{n_{12}}\right) H_2^0 - \left((\delta - 1) - \left(1 - \frac{1}{n_{12}}\right) \frac{((n_{12}^2 + n_{12}^2/n_{13}^2)\,\delta + 1)}{n_{12} + 1 + n_{12}/n_{13}}\right) h_{12}, \quad (49)$$

$$H_3^{св} - H_1^{св} = \left(1 - \frac{1}{n_{13}}\right) n_{12} H_2^0 - \left(\frac{n_{12}^3}{n_{13}^3} - \frac{1}{n_{12}}\right) \frac{((n_{12}^2 + n_{12}^2/n_{13}^2)\,\delta + 1}{n_{12} + 1 + n_{12}/n_{13}}\Big) h_{12}, \quad (50)$$

$$H_2^{св} - H_3^{св} = \left(1 - \frac{n_{13}}{n_{12}}\right) H_2^0 - \left((\delta - 1) - \left(1 - \frac{n_{12}^3}{n_{13}^3}\right) \frac{((n_{12}^2 + n_{12}^2/n_{13}^2)\,\delta + 1)}{n_{12} + 1 + n_{12}/n_{13}}\right) h_{12}. \quad (51)$$

Из полученных соотношений видно, что при $\delta = 1$ выражения (43)–(48) совпадают с (25)–(30), а (46)–(48) — с (33)–(35). При $\delta = 1$ и $n_{12} = n_{13} = 1$ вторые слагаемые в (43)–(48) равны нулю, выражения (49)–(51) также равны нулю — и подъем воды происходит как в отдельных вертикальных капиллярах.

При $h_{12} \to 0$ выражения (43)–(51) описывают подъем воды в одиночных вертикальных капиллярах, в которых высота подъема воды зависит от радиуса капилляра.

Из (46)–(48) следует, что с увеличением h_{13} ($\delta > 1$) h_1, h_2, h_3 и $H_1^{св}$, $H_2^{св}$, $H_3^{св}$ уменьшаются. Физическое объяснение этого — увеличение общего объема воды в капиллярах ниже отверстий. Изменение высот $H_1^{св}$, $H_2^{св}$, $H_3^{св}$ друг относительно друга зависит от соотношения параметров системы. Так, из (49)–(51) следует, что при $\delta = 1$ выражения (49)–(51) совпадают с (36)–(38) и равны нулю при $n_{12} = n_{13} = 1$ — как в независимых вертикальных капиллярах.

При $n_{12} = 1$ (радиусы правого и центрального капилляров равны) $n_{13} > 1$ и при прочих равных условиях:

$$H_2^{св} - H_1^{св} = (1 - \delta)\, h_{12}, \quad (52)$$

$$H_3^{св} - H_1^{св} = \left(1 - \frac{1}{n_{13}}\right) H_2^0 - \left(\frac{1}{n_{13}^3} - 1\right) \frac{((1 + 1/n_{13}^2)\,\delta + 1}{2 + 1/n_{13}}\Big) h_{12}, \quad (53)$$

$$H_2^{св} - H_3^{св} = (1 - n_{13})\, H_2^0 - \left((\delta - 1) - \left(1 - \frac{1}{n_{13}^3}\right) \frac{((1 + 1/n_{13}^2)\,\delta + 1)}{2 + 1/n_{13}}\right) h_{12}. \quad (54)$$

Из (52) видно, что разность $H_2^{св} - H_1^{св}$ не зависит от радиуса левого капилляра. Она равна нулю при $\delta = 1$ или $h_{12} = 0$ либо отрицательна, т. е. $H_2^{св} < H_1^{св}$, и ее абсолютная величина растет с увеличением δ и h_{12}. Это объясняется тем, что по мере роста δ и h_{12} общий объем воды в капиллярах до отверстий увеличивается, и $F_{Н2}$ поднимает больший объем воды в общей части, чем $F_{Н1}$, для которой объем поднимаемой воды в левом капилляре уменьшается $n_{13} > 1$.

Разности подъемов высот (53) и (54) при $h_{12} = 0$ не равны нулю, а принимают вид $H_3^{св} - H_1^{св} = (1 - 1/n_{13})\, H_2^0$ (> 0), $H_2^{св} - H_3^{св} = (1 - n_{13})\, H_2^0 - (\delta - 1)$ (<0).

Физический смысл этого результата заключается в том, что при уменьшении радиуса левого капилляра высота подъема воды в нем растет обратно пропорционально радиусу и превосходит $H_1^{св}$ и $H_2^{св}$.

При $h_{12} \neq 0$ и $\delta = 1$ (53) и (54) совпадают с (37) и (38). При увеличении n_{13} (уменьшении радиуса левого капилляра) ($H_3^{св} - H_1^{св}$) стремится к $\to (H_2^0 + (\delta + 2)\, h_{12}/2) > 0$, а ($H_2^{св} - H_3^{св}$) стремится к $\to ((1 - n_{13})\, H_2^0 - (\delta + 1)\, h_{12}/2) < 0$.

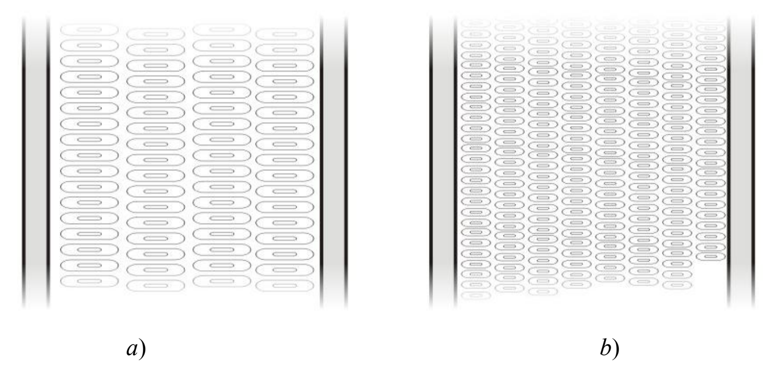
Физически это значит, что $F_{Н3}$ уменьшается, высота подъема воды в левом капилляре (пропорциональна $1/r_3$) растет, а объем воды в общей части этого капилляра уменьшается пропорционально r_3^2. Уменьшение этого объема приводит к перераспределению сил $F_{Н1}$, $F_{Н2}$ в уменьшившемся общем объеме системы. В результате $H_1^{св}$ и $H_2^{св}$ увеличиваются, но остаются меньшими $H_3^{св}$. Увеличение δ при прочих равных условиях приводит к увеличению разности подъема высот, что связано с увеличением объема воды в общей части системы. При одновременном выполнении условия $n_{12} \neq n_{13} > 1$ и $\delta > 1$ $H_1^{св}$, $H_2^{св}$, $H_3^{св}$ описываются соотношениями (49)–(51). В случае $h_{12} > h_{13}$ описанный выше процесс сохраняется.

Результаты исследования. Вышеприведенные рассуждения остаются справедливыми и если в системе *N* попарно связанных капилляров, и при наличии нескольких отверстий по высоте. При этом в последнем случае за h_{12} и h_{13} принимается высота от поверхности воды до верхнего отверстия.

Общим для рассмотренных моделей является следующее. Из (25)–(30) и (43)–(48) следует, что величины h_1, h_2, h_3 и $H_1^{св}$, $H_2^{св}$, $H_3^{св}$ стремятся соответственно к H_1^0, H_2^0, H_3^0 при h_{12}, стремящемся к нулю, и δ, стремящемся к 1. То есть чем ближе к поверхности воды расположено ближайшее отверстие в системе и чем меньше разность высот между отверстиями, тем выше поднимается вода в капиллярах.

Реальные сосуды не являются принятыми в модели классическими цилиндрами, а могут иметь форму от овала до неправильного многоугольника. Поэтому контакт сосудов осуществляется площадями смежных поверхностей, а не по образующей цилиндра. При таком строении появляется возможность реализовать рас-

пределение пор по поверхности сосуда, обеспечивающее почти непрерывное изменение их расстояния от начала до конца сосуда по высоте.



a) *b*)

Рис. 2. Распределение пор на поверхности стенок сосудов в виде горизонтальных (*a*) и диагональных (*b*) рядов

Fig. 2. Distribution of pores on the surface of vessel walls in the form of horizontal (a) and diagonal (b) series

Сказанное выше подтверждается распределением пор на поверхности стенок реальных сосудов. Наиболее часто они образуют диагональные ряды (очередная поровость) или короткие горизонтальные ряды [3, 5].

Из рис. 2 видно, что расположение окаймленных пор на площади стенок сосудов обеспечивает почти непрерывное распределение пор по высоте сосуда ксилемы. Это соответствует полученным в рассматриваемой модели результатам.

Обсуждение и заключения. Построенная модель позволяет изучить физические процессы продвижения воды в сосудах ксилемы растений с учетом их анатомического строения. Высота подъема воды в каждом из гидравлически попарно связанных капилляров не одинакова (за исключением случая равенства их радиусов). В растениях это позволяет осуществлять поступление воды в параллельные сосуды, расположенные на разных высотах. Таким образом обеспечивается возможность продвижения воды в растении при газовой эмболии [7] или закупорке пор тилами в отдельных сосудах или их частях.

При равенстве высот отверстий от поверхности воды максимальный ее подъем в капиллярах происходит в двух случаях:

— если их радиусы равны;

— если отверстия, соединяющие капилляры, расположены близко к поверхности воды.

Если высоты отверстий от поверхности воды не равны (количество капилляров больше двух), то максимальная высота подъема воды в капиллярах в рассмотренных моделях обеспечивается при выполнении условий:

— минимальная высота ближайшего отверстия к поверхности воды,

— минимальная разность высот между отверстиями.

Чем ближе к поверхности воды расположено ближайшее отверстие в системе и чем меньше разность высот между отверстиями, тем выше поднимается вода в капиллярах. Это подтверждается характером размещения пор на поверхности стенок реальных сосудов ксилемы, образующим почти непрерывное распределение пор по высоте.

Библиографический список

1. Harvay, B.-R. The theory of rise of sap in trees: Some historical and conceptual remarks / B. R. Harvay // Physics in Perspective. — 2013. — № 15. — P. 320–358.

2. Myburg, A.-A. Xylem Structure and Function. Encyclopedia of life science / A.-A. Myburg, R. Sederoff. — London : Nature Publishing Group, 2001. — P. 1–9.

3.Тимонин, А. К. Ботаника : в 4 т. Т. 3. Высшие растения / А. К. Тимонин. — Москва : Академия. — 2007. — 352 с.

4. Taiz, L. Plant Physiology / L. Taiz, E. Zeiger. — 3rd Edition. — Sunderland : Sinauer Associated, 2002. — 690 p.

5. Уголев, Б. Н. Древесиноведение и лесное товароведение / Б. Н. Уголев. — 3-е изд., стер. — Москва : Академия, 2010. — 272 с.

6. Ботаника. Учебник для вузов. На основе учебника Э. Страсбургера [и др.] : в 4 т. / П. Зитте [и др.]. — Москва : Академия, 2008. — Т. 1. — 367 с.

7. Borghetty, M. Water transport in plant under climatic stress / M. Borghetty, J. Grace, A. Raschi / Cambridge : Cambridge University Press, 1993. — P. 300.

8. Combined application of computer tomography and light microscopy for analysis of condition xylem area in coarse root of European beech and Norway spruce / P.-S. Nicolova [et al.] // European Journal of Forest Research. — 2009. — № 128. — P. 145–153.

9. Кипнис, И. А. Механизм продвижения воды в капиллярах ксилемы растений / И. А. Кипнис, Ю. М. Вернигоров / Вестник Дон. гос. техн. ун-та, 2014. — Т. 14, № 3 (78). — С. 78–88.

10. Кипнис, И. А. Подъем воды в ксилеме растений с трахеидальной проводимостью / И. А. Кипнис, Ю. М. Вернигоров / Вестник Дон. гос. техн. ун-та. — 2015. — Т. 15, № 2 (81). — С. 131–145.

11. Яворский, Б. М. Справочник по физике / Б. М. Яворский, А. А. Детлаф. — Москва : Наука, 1968. — 940 с.

References

1. Harvay, B.-R. The theory of rise of sap in trees: Some historical and conceptual remarks. Physics in Perspective, 2013, no. 15, pp. 320–358.

2. Myburg, A.-A., Sederoff, R. Xylem Structure and Function. Encyclopedia of life science. London: Nature Publishing Group, 2001, pp. 1–9.

3. Timonin, A.K. Botanika: Vysshie rasteniya. [Botany: Higher plants.] Moscow: Izdatel'skiy tsentr «Akademiya», 2007, 352 p. (in Russian).

4. Taiz, L., Zeiger, E. Plant Physiology. 3rd Edition. Sunderland: Sinauer Associated, 2002, 690 p.

5. Ugolev, B.N. Drevesinovedenie i lesnoe tovarovedenie. [Wood technology and forest commodity science.] 3rd reimpression. Moscow: Akademiya, 2010, 272 p. (in Russian).

6. Zitte, P., et al. Botanika. Uchebnik dlya vuzov. Na osnove uchebnika E. Strasburgera [i dr.]: v 4 t. [Botany. College textbook. On the basis of the textbook by E. Strasburgeret al.: in 4 vol.] Moscow: Akademiya, 2008, vol. 1, 367 p. (in Russian).

7. Borghetty, M., Grace, J., Raschi, A. Water transport in plant under climatic stress. Cambridge: Cambridge University Press, 1993, 300 p.

8. Nicolova, P.-S., et al. Combined application of computer tomography and light microscopy for analysis of condition xylem area in coarse root of European beech and Norway spruce. European Journal of Forest Research, 2009, no. 128, pp. 145–153.

9. Kipnis, I.A., Vernigorov, Y.M. Mekhanizm prodvizheniya vody v kapillyarakh ksilemy rasteniy. [Mechanism of promotion of water in the xylem capillaries plants.] Vestnik of DSTU, 2014, vol. 14, no. 3 (78), pp. 78–88 (in Russian).

10. Kipnis, I.A., Vernigorov, Y.M. Pod"em vody v ksileme rasteniy s trakheidal'noy provodimost'yu. [Water rise in the xylem of plants with tracheidal conductance.] Vestnik of DSTU, 2015, vol. 15, no. 2 (81), pp. 131–145 (in Russian).

11. Jaworski, B.M., Detlef, A.A. Spravochnik po fizike. [Physics: Reference book.] Moscow: Nauka, 1968, 940 p. (in Russian).

Поступила в редакцию 19.10.2017
Сдана в редакцию 19.10.2017
Запланирована в номер 15.01.2018

Received 19.10.2017
Submitted 19.10.2017
Scheduled in the issue 15.01.2018

Об авторах:

Кипнис Иосиф Аншелевич,
заместитель генерального директора ООО «Научно-производственная фирма “КАСИОР”» директор по науке (РФ, 119571, г. Москва. Лениский пр-т, 154) кандидат технических наук,
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2546-8457
ikipnis@yandex.ru

Вернигоров Юрий Михайлович,
профессор кафедры «Физика» Донского государственного технического университета (РФ, 344000, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), доктор технических наук, профессор,
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1184-1708
jvernigorov@dstu.edu.ru

Authors:

Kipnis, Iosif A.,
Associate General Director on science, “KASIOR” Research and Production Company (Russia, 119571, Moscow, Leninskiy prospect, 154) Cand.Sci. (Eng.),
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2546-8457
ikipnis@yandex.ru

Vernigorov, Yury M.,
professor of the Physics Department, Don State Technical University (RF, 344006, Rostov-on-Don,. 344000, Gagarin sq., 1), Dr.Sci, (Eng.), professor,
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1184-1708
jvernigorov@dstu.edu.ru